Über die Achromasie optischer Systeme für mehr als zwei Wellenlängen

Naumann, Helmut

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 6, 1954,
S. 107-112

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Über die Achromasie optischer Systeme für mehr als zwei Wellenlängen

Von **Helmut Naumann**

Mit 1 Abbildung

Vorgelegt von Herrn **G. Cario**

Summary: Achromatism for any number of k wavelengths in a system of k thin lenses is possible when the partial dispersions of the k glasses of these lenses have no linear dependency with another. Indeed this dependency is existent within the visible spektrum (Abbe). It is shown here that it is less actual with increasing distance of the considered wave length from visible lines, esp. in infrared. Thus achromatism for more than two wavelengths is possible with normal glasses provided that no more than two of them are in the visible. But technical possibilities for the realisation of such a multi-achromatic system are by far better when natural or artificial crystals for one lens at least or for two of them are used. Glasses with shortened dispersion in blue ("short flints") are useful too, but ask for special consideration.

I. Sind $\varphi_1 \ldots \varphi_i \ldots \varphi_k$ die Brechkräfte von k Linsen, die ohne Luftraum und ohne wesentliche Dicke zentriert aneinanderliegen und ein System der Gesamtbrechkraft $\Phi = 1$ liefern, so muß folgendes Gleichungssystem erfüllt sein, wenn die Gesamtbrechkräfte für die Wellenlängen $\lambda_1 \ldots \lambda_j \ldots \lambda_k$ einander gleich, also sämtlich gleich der Maßstabseinheit, sein sollen:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=k} \varphi_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^{i=k} \varphi_i/\nu_{i,j} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

für $j = 2 \ldots\ldots k$.

Dabei ist

$$\nu_{i,j} = \frac{n_{i,o} - 1}{n_{i,j} - n_{i,1}} \qquad (2)$$

(für ν lies „nü") die Abbesche Zahl für das Glas der $i$ten Linse für die Wellenlänge j; $n_{i,o}$ die Brechzahl für die Meßwellenlänge, im allgemeinen die d-Linie oder die Mitte der beiden D-Linien; $n_{i,1}$ die Brechzahl für die Wellenlänge, deren Gesamtbrechkraft als Maß für alle anderen ihr gleich zu machenden Brechkräfte dient, im allgemeinen — hier durchweg — die C-Linie; $n_{i,j}$ die Brechzahl für jede weitere Wellenlänge.

Soll das Gleichungssystem [1] endliche Werte liefern, so darf die Determinante aller Faktoren der φ_i nicht verschwinden.

II. Für $k = 2$ ergibt sich der triviale Fall, daß ein zweilinsiges System für zwei Wellenlängen achromatisch ist, und die seit alters her bekannte Beziehung

$$\nu_{12} \neq \nu_{22}.$$

III. Bei $k = 3$ dürfen die $v_{i,j}$ nicht linear voneinander abhängig sein. Seit Abbe [1] schreibt man für $v_{i,3}$ bzw. dessen reziproken Wert

$$1/v_{i,3} = 1/v_{i,2} \cdot \frac{n_{i,3} - n_{i,1}}{n_{i,2} - n_{i,1}} = 1/v_{i,2} \cdot \delta_{i,3} \tag{3}$$

um dann die „Partialdispersionen“ $\delta_{i,3}$ näher zu betrachten. Offenbar gilt für sie die gleiche Bedingung der linearen Unabhängigkeit voneinander. Abbe zeigte aber, daß die Beziehung

$$\delta_{i,3} = a_3 + b_3 \cdot v_{i,2} \tag{4}$$

von fast allen Gläsern zumindest für Wellenlängen des sichtbaren Spektrums recht gut erfüllt wird; die Konstanten a_3, b_3 sind allein Funktionen der Wellenlänge. Es ist also mit „Regelgläsern“, die der Beziehung [4] genügen, nicht möglich, ein optisches System für mehr als zwei Wellenlängen zu achromatisieren. Nur die von Schott auf Anregung Abbes erschmolzenen Kurzflinte bieten einen Ausweg, da sie sich der Beziehung [4] nicht unterordnen; man kann für sie die empirische Gleichung

$$\delta_{i,3Kz} = a_3 + C \cdot b_3 \cdot v_{i,2} \tag{5}$$

aufstellen, wobei $C = 1 \ldots 1{,}15$.

Soweit das allgemein Bekannte.

IV. Eine genaue Betrachtung der Brechzahlen von Regelgläsern zeigt, daß die Beziehung [4] um so weniger den Tatsachen gerecht wird, je weiter die dritte Wellenlänge von den beiden anderen entfernt ist. Die Kurve $\delta_{i,3}$ $(v_{i,2})$ ist deutlich gekrümmt und in erster Näherung darstellbar durch

$$\delta_{i,3} = a'_3 + b'_3 \cdot v_{i,2} + c'_3 \cdot v^2_{i,2}\,. \tag{6}$$

Zunächst sei eine Tafel einiger Schottgläser und anderer Substanzen gegeben, auf deren Brechzahlen das Folgende basiert [2]:

Stoff	BK 7	SK 11	K 3	BaF 4	F 2	KzF 1	Flußspat	Steinsalz	Kalkspat
Schmelze Nr.	41659	24725	42399	23486	Katalog	Katalog			
n_d —	1·51623	·56106	·51775	·60524	·62000	·55115	·43383	·54432	·65836
$v_{i,2}$	64,0	61,2	58,8	43,8	36,3	49,6	95,2	42,8	48,9

Hier die Konstanten des Ansatzes [6] für die ersten fünf Regelgläser der obigen Aufstellung:

λ_3	a'_3	b'_3	c'_3
h = 4047 AE	+ 1,062	+ 10,3 · 10^{-4}	− 36 · 10^{-6}
g = 4358 AE	+ 0,646	− 16,5 ,,	− 1,5 ,,
A = 7683 AE	− 0,262	− 17,5 ,,	− 4,9 ,,
8115 AE	− 0,377	− 4,6 ,,	− 12,6 ,,
9112 AE	− 0,516	− 10,9 ,,	− 20 ,,
10140 AE	− 0,722	+ 29,5 ,,	− 77 ,,
10830 AE	− 0,786	+ 30,9 ,,	− 90 ,,

Man erkennt, daß mit zunehmendem Abstand der Wellenlänge λ_3 vom sichtbaren Spektrum bzw. der C- und F-Linie die Konstante c'_3 wächst, was besagt, daß die lineare Abhängigkeit in ebenso zunehmendem Ausmaß nicht gegeben ist. Daraus folgt, daß Achromate für drei Wellenlängen, d. h. also Apochromate im Sinne Abbes, aus drei der genannten und ähnlichen Regelgläsern für C, F und eine ultrarote Wellenlänge möglich sind. In der Figur sind die $\delta_{i,3}$ für dieselben Wellenlängen über einer $v_{i,2}$-Abszisse aufgetragen, dazu sind für ein Kurzflint und einige später zu betrachtende Substanzen die $\delta_{i,3}$ als singuläre Punkte eingefügt.

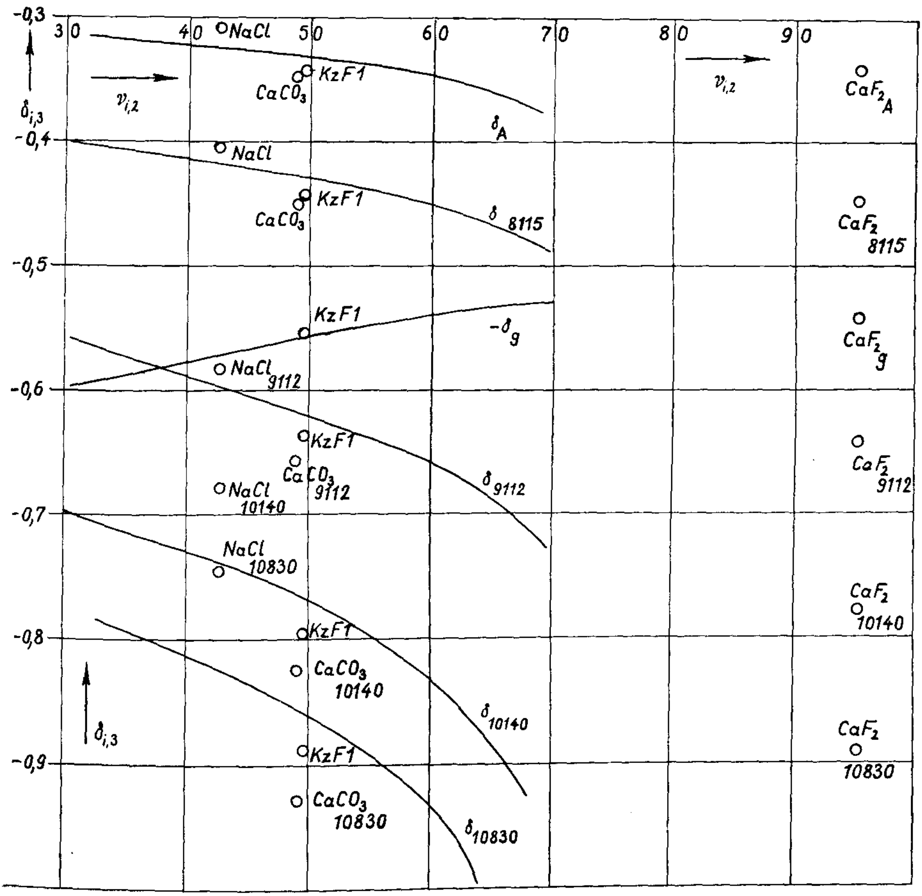

Abb. 1. (Erklärung im Text)

Diese Punkte für Kurzflint liegen auf der konkaven Seite der Kurve, so daß sie mit zwei $\delta_{i,3}$-Werten von Regelgläsern eine Gerade bilden können. Man kann also einen Apochromaten der genannten Art nicht bauen, wenn man Kurzflint zu zwei Regelgläsern mit weit auseinanderliegenden $v_{i,2}$ fügt, muß es dagegen verwenden, wenn man eng benachbarte Regelgläser benutzt.

Als Beispiel seien die φ_i für einige Apochromate für die Wellenlängen C, F und 10830 AE angegeben, wobei die Summe $\sum |\varphi_i|$ als Maß für die zu erwartenden Linsenkrümmungen und damit die technische Brauchbarkeit dient; sie soll möglichst klein sein.

Apochromate

Beispiel	I Weit auseinander liegende Regelgläser	II Eng benachbarte Gläser mit Kurzflint	III Weit auseinander liegende Gläser mit Kurzflint
Linse 1	BK 7	K 3	BK 7
φ_1	− 4,162	+ 9,830	+ 137,8
Linse 2	BaF 4	KzF 1	KzF 1
φ_2	+ 16,458	− 12,909	− 219,2
Linse 3	F 2	BaF 4	F 2
φ_3	− 11,296	+ 4,079	+ 82,4
$\Sigma \|\varphi_i\|$	31,916	26,818	439,4

V. Soll für $k \gtreqless 4$ eine Lösung der Beziehungen (1) möglich sein, also ein Tetrachromat, Pentachromat usw. geschaffen werden, dann dürfen die $\delta_{i,j}$ überhaupt keine rationalen Funktionen von $v_{i,2}$ sein. Das ist offenbar um so weniger wahrscheinlich, je mehr gültige Ziffern die $\delta_{i,j}$ aufweisen, d. h. also, je genauer die $n_{i,j}$ bestimmt sind. Diese Fragen der Meßgenauigkeit und ihrer physikalisch bedingten Grenzen sollen hier nicht diskutiert werden, vielmehr für das Folgende angenommen, daß den in der ersten Tafel auszugsweise zitierten Zahlenwerten diese Genauigkeit innewohne — eine Voraussetzung, die gelegentlich in der technischen Optik gemacht werden muß [3].

Die Aufgabe wird leichter lösbar, wenn Stoffe, beispielsweise Kristalle, benutzt werden, deren $\delta_{i,j}$ auch nicht annähernd den Beziehungen (4) und (6) genügen; offenbar werden die Gleichungen (1) um so kleinere φ liefern, je weniger leicht sich die $\delta_{i,j}$ in eine Kurve niederer Ordnung einfügen lassen. In diesem Zusammenhang wurden Flußspat, Steinsalz und Kalkspat in die Betrachtung einbezogen.

Es ergeben sich dann für einen Tetrachromaten für die Linien C, F, 8115 und 10830 AE folgende beispielsweise Lösungen:

Tetrachromate

Beispiel	I Zwei Kristalle, Kurzflint	II Ein Kristall, Kurzflint	III Kurzflint	IV Regelgläser
Linse 1	Flußspat	SK 11	BK 7	BK 7
φ_1	+ 2,911	− 8,402	− 3,820	− 14,80
Linse 2	Kalkspat	KzF 1	K 3	K 3
φ_2	+ 2,898	− 9,586	+ 13,565	+ 24,89
Linse 3	KzF 1	Steinsalz	KzF 1	BaF 4
φ_3	− 5,783	+ 1,014	− 9,475	− 12,43
Linse 4	F 2	F 2	F 2	F 2
φ_4	+ 0,974	+ 1,170	+ 0,729	+ 3,34
$\Sigma \|\varphi_i\|$	12,566	20,172	27,589	55,46

VI. Für einen Pentachromaten für die Wellenlängen g, F, C, 8115 und 10830 AE findet man folgende beispielsweise Lösungen:

Pentachromate

Beispiel	I Ein Kristall, Kurzflint	II Kurzflint	III Regelgläser
Linse 1	BK 7	BK 7	BK 7
φ_1	− 0,30563	+ 5,54766	+ 92,6
Linse 2	K 3	K 3	SK 11
φ_2	+ 10,61064	+ 3,90084	+ 900,6
Linse 3	KzF 1	KzF 1	K 3
φ_3	− 11,24434	− 17,56343	− 1249,1
Linse 4	Steinsalz	BaF 4	BaF 4
φ_4	+ 0,55077	+ 10,61131	+ 430,4
Linse 5	F 2	F 2	F 2
φ_5	+ 1,38856	− 1,49638	− 173,5
$\Sigma \lvert\varphi_i\rvert$	24,0999	39,1196	2845,2

Man erkennt, daß sich Systeme für mehr als drei Farben achromatisieren lassen, wenn man zu Kurzflint greift, daß sich durch Einführung von Kristallsubstanzen aber noch günstigere Brechkraftverhältnisse ergeben.

Diese Vielfach-Achromate müssen natürlich für die geometrischen Abbildungsfehler gut korrigiert sein, damit die chromatische Besserung sich auswirkt; in den Krümmungen der Linsen sind reichlich viele Variable dafür vorhanden. Für manche spektrale Arbeiten bieten solche Systeme sicherlich Vorteile [4].

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, daß die partielle Dispersion δ_{ij} optischer Gläser um so weniger der von Abbe angegebenen linearen Beziehung genügt, je weiter die dritte Wellenlänge, für die Achromasie herrschen soll, von den anderen beiden im Sichtbaren angenommenen Wellenlängen entfernt ist. Daraus ergibt sich, daß sich drei dünne abstandslose Linsen für drei eng benachbarte Wellenlängen nur achromatisieren lassen, wenn eine der Linsen aus Kurzflint besteht, das jene Beziehung nicht befolgt; für drei weit voneinander entfernte Wellenlängen (z. B. zwei im Sichtbaren, eine im Ultraroten) sind jedoch drei der dieser Beziehung genügenden „Regelgläser" erforderlich, während dann Kurzflint nicht benutzt werden darf.

Diese Tatsache liefert weiter die Möglichkeit, Achromate für beliebig viele Wellenlängen zu schaffen; Beispiele für $k = 4$ und $k = 5$ werden gegeben. Die Einzelbrechkräfte φ_i nehmen bei Regelgläsern dann in solchem Umfang zu, daß die praktische Auswertung unmöglich ist, sie halten sich aber in technisch auswertbaren Grenzen, wenn Baustoffe benutzt werden, deren δ_{ij} weitab von denen der Regelgläser liegen.

Literatur

[1] M. v. Rohr, Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten. Berlin 1904, S. 359; Slevoigt, Z. Instrumentenkunde **57** (1937) S. 337
[2] Aus Glasmeßzetteln des Schottwerkes; Tabellenwerk Landoldt-Börnstein.
[3] A. W. Tronnier, Foto-Kino-Technik **3**, Heft 11 und 12, Nov./Dez. 1949, S. 271 und 299, insb. S. 300.
[4] Harrison, Archer u. Camus, Journ. Opt. Soc. Am. **42**, Oktober 1952. S. 706--712, insbes. S. 709.